



TITLE:

De Sitter群上のFourier解析と跡公式 (表現論とIntertwining Operator)

AUTHOR(S):

牟田, 洋一

CITATION:

牟田, 洋一. De Sitter群上のFourier解析と跡公式 (表現論とIntertwining Operator). 数理解析研究所講究録 1976, 280: 1-15

ISSUE DATE:

1976-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106046>

RIGHT:

De Sitter 群上の Fourier 解析と跡公式

佐賀大 理工 牟田洋一

§0. 序

Selberg の trace formula は自然に半単純 Lie 群上のある K -type に従う可積分急減少 C^∞ 関数の Fourier 変換の研究に導くが, これはそれ自体としても極めて興味深い問題である.

本稿においては De Sitter 群に対して ある K -type に従う L^p ($0 < p \leq 2$)-型急減少 C^∞ 関数の Fourier 変換を実行し, 保型形式論への一つの応用を試みる.

§1. 準備

H を 4 元数体, $U = \{u \in H : |u| = 1\}$ とし

$$G = \left\{ g \in GL(2, H) : g^* J g = J \right\}$$

とおく. ここに $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. G は De Sitter 群の universal covering group の一実現である. 今, G の 3 つの subgroups

K, A, N を

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} : u, v \in \mathcal{U} \right\},$$

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} ch_{\frac{t}{2}} & eh_{\frac{t}{2}} \\ eh_{\frac{t}{2}} & ch_{\frac{t}{2}} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix} : x \in i\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R} \right\}$$

によって定めると, $G = KAN$ は G の岩沢分解を与える. これに伴なり $g \in G$ の分解を

$$g = K(g) a_{t(g)} x_g \quad K(g) \in K, \quad t(g) \in \mathbb{R}, \quad x_g \in N$$

と書く. 極大 compact 群 K は 2 つの部分群

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathcal{U} \right\} \quad \text{と} \quad K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} : v \in \mathcal{U} \right\}$$

の直積であるが, $\mathcal{U} \cong SU(2)$ 従って, K の既約 unitary 表現は非負半整数の pair (n, n') で parametrize される. これを $\rho^{n, n'}$ とし, $\rho^{n, n'}$ の正規化された指標を $\chi^{n, n'}$ と書く.

G の元 g はまた

$$g = k_1 k_2 a_t k_2' \quad k_1 \in K_1, \quad k_2, k_2' \in K_2, \quad t \geq 0$$

の形に書けるが, $g \notin K$ のとき この表わし方は一意である.

§2. 関数 $\phi_{n,0}(g, s)$

半整数 $n \geq 0$ を任意に fix しておく. $\forall s \in \mathbb{C}$ に対し関数 $\phi_{n,0}(g, s)$ を

$$\phi_{n,0}(g,s) = \int_K \frac{\chi^{n,0}(k(gk))}{\chi^{n,0}(e)} e^{-sT(gk)} dk$$

によって定義する. $\phi_{n,0}(g,s)$ は class $\chi^{n,0}$ の球関数で,

$g = k_1 k_2 a_t k'_2$ に対し

$$\phi_{n,0}(g,s) = \phi_{n,0}(a_t,s) \frac{\chi^{n,0}(k_1)}{\chi^{n,0}(e)}$$

であり, その explicit form は 超幾何関数を用いて

$$\phi_{n,0}(a_t,s) = (1 - th^2 \frac{t}{2})^s F(s+n, s-n-1, 2; th^2 \frac{t}{2})$$

と書かれる. 我々の analysis においては, G の無限遠における $\phi_{n,0}(g,s)$ の behaviour が問題になる. そのため清水氏 [7] によって得られた結果が必要である.

変数変換 $y = sh^2 \frac{t}{2}$ により $\phi_{n,0}(y,s) \equiv \phi_{n,0}(a_t,s)$ は

$$\begin{aligned} \phi_{n,0}(y,s) = & \left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{-s} \frac{\Gamma(3-2s)}{\Gamma(n+3-s)\Gamma(2-s-n)} F(s+n, s+n-1, 2s-2; -\frac{1}{y}) \\ & + \left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{s-3} \frac{\Gamma(2s-3)}{\Gamma(s+n)\Gamma(s-n-1)} F(n+3-s, n+2-s, 4-2s; -\frac{1}{y}) \end{aligned}$$

となる. 右辺第1項を $\varphi_n(y,s)$ と書くと, $y > 1$ のとき

$$\phi_{n,0}(y,s) = \varphi_{n,0}(y,s) + \varphi_{n,0}(y,3-s)$$

が成立つ. $\varphi_{n,0}(y,s)$ と Plancherel density との積を $\Phi_n(y,s)$ と書くと

$$\Phi_n(y,s) = \left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{-s} \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \frac{\Gamma(3-2s)}{\Gamma(n+2-s)\Gamma(1-s-n)}$$

$$\times \left(s - \frac{3}{2}\right) \tan \pi \left(s + n - \frac{3}{2}\right) F\left(s + n, s + n - 1, 2s - 2; -\frac{1}{y}\right),$$

これは $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{3}{2} - n$ で meromorphic, ξ の singularities は

$$s = -n + 2, -n + 3, \dots, n + 1 \quad \left(s \neq \frac{3}{2}\right)$$

にある simple poles だけである。

今

$$g_n(s) = 2\pi (-1)^{2n+1} (s + n - 2)(s + n - 3) \cdots (s - n - 1),$$

$$\alpha_k^n(s) = \binom{2n}{k} (s - n - 2)_{2n-k} (s + n)_k,$$

$$\Psi_n(y, s) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k^n(s) \int_0^1 t^{s+n-2} (1-t)^{s+n-2} \left(1 + \frac{t}{y}\right)^{-(s+n+k)} dt$$

および

$$\mathcal{K}_n(y, s) = \frac{(s + n - 1) \left(\frac{3}{2} - s\right)}{g_n(s)} \Psi_n(y, s)$$

と置く。このとき $\Phi_n(y, s)$ は

$$\Phi_n(y, s) = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{-s} \mathcal{K}_n(y, s)$$

と書かれる。

§3. $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ とその Fourier 変換

p を $0 < p \leq 2$ なる定数とせよ。 σ, ξ を G 上のいつもの K -両側不変な関数, Ω を G の Casimir 作用素とする。 G 上

の C^∞ 関数で

$$f \circ X^{n,0} = f, \quad \int_K f(kgk^{-1}) dk = f(g)$$

および

$$\mu_{r,l}^{(p)}(f) \equiv \sup_{g \in G} (1 + \sigma(g))^r \varepsilon(g)^{-\frac{2}{p}} |\Omega^l f(g)| < +\infty \text{ for all } r, l = 0, 1, 2, \dots$$

を満たすものの全体を $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ で表し, seminorm 系 $\mu_{r,l}^{(p)}$ による位相をいれる. convolution により $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ は可換な Fréchet 代数となる. また f が $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ の関数なるとき積分

$$\hat{f}(s) = \int_G f(g) \phi_{n,0}(g, s) dg$$

は集合 $\mathcal{F}^{(p)} \equiv \{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(s) - \frac{3}{2}| \leq \frac{3}{2}(\frac{2}{p}-1)\} \cup \{g \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : n-g \in \mathbb{Z}\}$ において絶対一様に収束する. この \hat{f} を f の Fourier 変換と呼ぶ.

$\mathcal{F}^{(p)}$ 上の連続関数 $F(s)$ で, $\operatorname{int} \mathcal{F}^{(p)}$ において正則で

$$F(s) = F(3-s), \quad F(g) = 0 \text{ if } g > n+1, n-g \in \mathbb{Z},$$

$$\zeta_{m,l}^{(p)}(F) \equiv \sup_{s, g} \left\{ (1 + |s|^2)^m \left| \frac{d^l F}{ds^l}(s) \right|, |F(g)| \right\} < +\infty$$

$$\text{for all } m, l = 0, 1, 2, \dots$$

を満たすものの全体を $\mathcal{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^{(p)})$ と書く. ただし $p=2$ のときは直線 $\operatorname{Re}(s) = \frac{3}{2}$ 上の C^∞ -関数と考えるのである. 上の seminorm 系で $\mathcal{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^{(p)})$ は可換 Fréchet 代数となる. このとき次の定理が成り立つ.

定理 1. 変換 $f \rightarrow \hat{f}$ は位相代数 $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ と $\mathcal{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^p)$ の間の位相同型を与える.

$g > n+1$ のとき $\phi_{n,0}(g, g)$ が 2 乗可積分なること, および

$$\int_G \left| f(g) \frac{\partial^m}{\partial s^m} \phi_{n,0}(g, s) \right| dg$$

を計算することにより $f \rightarrow \hat{f}$ の連続性は比較的容易に得られる. 逆を云うためには, 任意の $F \in \mathcal{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^p)$ に対し

$$f(g) \equiv 2 \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} F(s) \Phi_n(g, s) ds + \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right)^2 \sum_{\substack{1 \leq g \leq n \\ n-g \in \mathbb{Z}}} (2g-1)(n+g)(n-g+1) F(g+1) \phi_{n,0}(g, g+1)$$

が $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ に属し, $F \rightarrow f$ が $\mathcal{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^p)$ から $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ への連続写像なることを示せばよい.

F は $\mathcal{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^p)$ に属するから, 関数 $F(s) \Phi_n(g, s)$ は $\text{int } \mathcal{F}^p$ で meromorphic, およびその singularities はすべて simple poles で, それらは高々

$$s = -n+2, -n+3, \dots, n+1 \quad (s \neq \frac{3}{2})$$

にある. 簡単のため $\frac{3}{p} \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ としよう. F の急減少性と留数定理によ, 上の積分は

$$f(g) = 2 \int_{\frac{3}{p}-i\infty}^{\frac{3}{p}+i\infty} F(s) \Phi_n(g, s) ds + \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right)^2 \sum_{\substack{\frac{3}{p}-1 < g \leq n}} (2g-1)(n+g)(n-g+1) F(g+1) \phi_{n,0}(g, g+1)$$

に等しい. この等式の右辺第 1 項を $f^{(0)}$, 第 2 項を $f^{(1)}$ と書く.

とこぞで

$$\phi_{n,0}(y, g+1) = (1+y)^{-(g+1)} \left\{ 1 + \frac{(g+n+1)(g-n)}{2!} \frac{1+y}{y} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-g-1} \frac{(g+n+1)_{n-g} (n-g)!}{(n-g+1)!} \left(\frac{1+y}{y} \right)^{n-g-1} \right\}$$

で あるから, $g+1 > \frac{3}{p}$ のとき

$$\sup_{y \geq \varepsilon_0 > 1} y^{\frac{3}{p}} (\log y)^r |\phi_{n,0}(y, g+1)| < +\infty \quad (r=0, 1, 2, \dots)$$

が成立つ。よって, $f^{(1)} \in \mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ かつ $F \rightarrow f^{(1)}$ は連続である。

3. $f^{(0)} \in \mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ と $F \rightarrow f^{(0)}$ の連続性は次の命題から得られる:

命題 7.2 ($l, g \geq 0$, integers) 定数 $B_{lg} > 0$ と $k \in \mathbb{N}$ を適当に選んで, すべて $F \in \mathcal{Z}_{n,0}(\mathbb{F}^p)$ に対し

$$\sup_{y \geq \varepsilon_0 > 1} \left| y^{\frac{3}{p}} (\log y)^l \int_{\frac{3}{p}-i\infty}^{\frac{3}{p}+i\infty} F(s) y^{-s} \frac{\partial^g}{\partial s^g} \chi_n(y, s) ds \right| \leq B_{lg} \cdot \zeta_{lg}^{(p)}(F)$$

が成立つようにできる。

以上より, $f = f^{(0)} + f^{(1)} \in \mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ であり, $F \rightarrow f$ が $\mathcal{Z}_{n,0}(\mathbb{F}^p)$ から $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ への連続写像なることがわかった。

$\frac{3}{p} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のときも少し手を加えればよい。

§4. Gangolli-Warner の定理の拡張

Γ を G の discrete subgroup で, $\Gamma \backslash G$ が compact なものとし, U を $L^2(\Gamma \backslash G)$ における G の正則表現とせよ。このとき

U は重複度有限の既約表現の可算和

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \pi_j$$

に分解する。我々は、右辺に現われる既約成分のうち $\rho^{n,0}$ を含むものの全体の様相と調べたい。これは Gangolli [3] が提唱した問題の *special case* である。

定義 (1). G 上の非負連続関数 f は、すべての $g \in G$ に対し

$$f(g) \leq C \cdot \int_{gV} f(h) dh$$

が成立つような定数 $C > 0$ と G の compact ϵ -近傍 V が存在することを *regular growth* と云われる。

(2). G 上の連続関数 f は、級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma^{-1} \gamma x)$$

が $G \times G$ 上 compact 一様収束し、 $U(f)$ が $L^2(\Gamma \backslash G)$ 上の trace class の作用素なことを *admissible* であると呼ばれる。

§3 で得た定理 1 を用いれば、Gangolli-Warner [4] と同様の方法で次の定理を証明することになる。

定理 2. $\mathcal{C}_{n,0}^{(1)}(G)$ の元はすべて *admissible* である。

定理 3. $f \rightarrow \text{trace } U(f)$ は $\mathcal{C}_{n,0}^{(1)}(G)$ 上の *generalized function* である。

§5. Vector bundle $\mathcal{F}_{n,0}$ 上の熱方程式

以後 Γ は単位元以外に elliptic element をもたない と仮定し
 より. このとき $\Gamma \backslash G/K$ は compact C^∞ -manifold である. $\rho^{n,0}$
 の表現空間を $V_{n,0}$ とする. $\Gamma \backslash G$ に K の表現 $k \rightarrow \rho^{n,0}(k)$ を
 associate して得られる $\Gamma \backslash G/K$ 上の vector bundle $(\Gamma \backslash G) \times_K V_{n,0}$
 を $\mathcal{F}_{n,0}$ と書こう. $C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$ 上の Laplacian を

$$\Delta: C^\infty(\mathcal{F}_{n,0}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$$

とすれば, $\varphi \in C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$ に対して

$$(A) \quad \Delta \varphi = \Omega \varphi + 2n(n+1) \varphi$$

が成立つ (φ を G 上の $V_{n,0}$ -値関数とみなす). $\Gamma \backslash G/K$ は compact
 であるから, Δ は重複度有限の discrete spectra を有す. 相
 異なる固有値を

$$0 \leq r_0 < r_1 < r_2 < \dots \uparrow +\infty,$$

対応する重複度を

$$n_0, n_1, n_2, \dots$$

としておく.

正則表現 π に含まれる既約成分のうち $\rho^{n,0}$ に dual な K の
 表現を含むものの一つを π とすれば, $\pi(\Omega)$ は scalar であ
 るが, 松島 [5] により, この値は $r_j - 2n(n+1)$ ($j=0,1,2,\dots$)
 のいずれかに等しい. ^{更に}このような π の集合を Π_j と書くこ
 とにすると

$$n_j = \sum_{\pi \in \pi_j} [U : \pi] \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

である.

前号で述べた我々の問題を《区間 $(0, +\infty)$ 上の関数

$$N(r) \equiv \sum_{r_j < r} n_j r_j$$

の $r \rightarrow +\infty$ における *asymptotic behaviour* を求めること》と解する. 即ち, $\rho^{n,0}$ に dual な表現を含む既約成分の存在集合の様相を Casimir 作用素ではかろうというわけである.

$N(r)$ の Laplace 変換を

$$L(\alpha) \equiv \int_0^\infty e^{-\alpha r} dN(r)$$

とおく. $L(\alpha)$ の behaviour を調べる. そのため $\mathcal{F}_{n,0}$ 上の heat equation

$$(B) \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \Delta u = 0$$

の elementary solution を構成する. そのため, (A) に鑑み, $\mathcal{C}_{n,0}^{(1)}(G)$ の中に方程式

$$(C) \quad \frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda} + \Omega g_\lambda + 2n(n+1)g_\lambda = 0 \quad (\lambda > 0)$$

をみたす関数 g_λ を求めたい. (C) の両辺を Fourier 変換すれば

$$(C') \quad \frac{d\hat{g}_\lambda(s)}{d\lambda} + (s(3-s) + n(n+1))\hat{g}_\lambda(s) = 0.$$

今, \mathbb{F}^1 上の関数 $H_\lambda(s)$ を

$$H_\lambda(s) = \begin{cases} e^{-\lambda\{s(3-s)+n(n+1)\}} & s \in \mathbb{F}^1, \\ & s \neq n+2, n+3, \dots \\ & -n+1, -n, \dots \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって define する. 各 $\lambda > 0$ に対して $H_\lambda(s) \in \mathcal{G}_{n,0}(\mathbb{F}^1)$.

また H_λ は (C') を満す. 定理 1 によって $\hat{g}_\lambda = H_\lambda$ なる $g_\lambda \in \mathcal{C}_{n,0}^{(1)}(G)$ が唯一に存在する. これは確かに (C) を満す.

命題 1. $\{g_\lambda : \lambda > 0\}$ は $\mathcal{C}_{n,0}^{(1)}(G)$ における Dirac sequence である. 即ち, $\forall f \in \mathcal{C}_{n,0}^{(1)}(G)$ に対して

$$\int_G f(g) g_\lambda(g) dg \rightarrow f(e) \quad (\lambda \downarrow 0)$$

が成立つ.

さて, 定理 2 によ, 2 級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} g_\lambda(\gamma^{-1}\gamma x)$$

は $\Gamma G \times \Gamma G$ 上の連続関数に収束する. そこで今 $\Gamma G \times \Gamma G$ 上の $\text{Hom}(V_{n,0}, V_{n,0})$ -値 C^∞ -関数 G_λ を

$$G_\lambda(x, y) \equiv \int_K \left(\sum_{\gamma} g_\lambda(\gamma^{-1}\gamma x k) \right) \rho^{n,0}(k^{-1}) dk$$

によって定義する. このとき

命題 2. $G_\lambda(x, y)$ は heat equation (B) の elementary

solution である。

§ 6. Asymptotic behaviour of the spectra

各 $\lambda > 0$ に対し, $C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$ 上の正定値作用素 T_λ を

$$(T_\lambda \varphi)(x) = \int_{\Gamma \backslash G} G_\lambda(x, y) \varphi(y) dy$$

により定める。 G_λ は $\Gamma G \times \Gamma G$ 上の連続関数であるから T_λ は trace class の作用素で, trace を計算することにより次の定理が得られる:

定理 4 (trace formula) 次の等式が成り立つ:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} n_j e^{-\lambda r_j} = \frac{1}{2n+1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Gamma \backslash G} g_\lambda(\gamma^{-1} \gamma \gamma) d\gamma.$$

$\lambda \downarrow 0$ における $\mathcal{L}(\lambda)$ の behaviour を求めよう。上の公式から

$$\begin{aligned} (2n+1) \mathcal{L}(\lambda) &= g_\lambda(e) \text{vol}(\Gamma \backslash G) \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Gamma \backslash G} g_\lambda(\gamma^{-1} \gamma \gamma) d\gamma \end{aligned}$$

である。

$$g_\lambda(e) = \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right)^2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ n-j \in \mathbb{Z}}} (2j-1)(n+j)(n-j+1) e^{-\lambda((j+1)(2-j) + n(n+1))}$$

$$+ \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + s^2 + n(n+1)\right\}} \left(n + \frac{1}{2} + s^2\right) s \operatorname{th} \pi(s+in) ds.$$

したがって, $\lambda > 0$ のとき

$$g_\lambda(e) \sim \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \lambda^{-2}$$

が得られる。残る項については, 命題1と集合

$$\{g^{-1}\gamma g : g \in G, \gamma \in \Gamma - \{e\}\}$$

が K と交差する γ の G の closed set と γg ことから

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Gamma/G} g_\lambda(g^{-1}\gamma g) dg \rightarrow 0 \quad (\lambda > 0)$$

が成立すると推測できる。特に, g_λ 自身 regular growth なる
ことか云えれば上のことは成立する。このとき

$$\mathcal{L}(\lambda) \sim \frac{2n+1}{16\pi^2} \operatorname{vol}(\Gamma/G) \lambda^{-2} \quad (\lambda > 0)$$

或いは

$$N(r) \sim \frac{2n+1}{32\pi^2} \operatorname{vol}(\Gamma/G) r^2 \quad (r \rightarrow +\infty)$$

なることがわかる。

参 考 文 献

- [1] M.Eguchi & A.Kowata, On the Fourier transform of rapidly decreasing functions of L^p type on a symmetric space, Hiroshima Math. J., 6(1976), 143-158.
- [2] L.Ehrenpreis & F.I.Mautner, Some properties of the Fourier transform on semisimple Lie groups I, Ann. of Math. 61(1955) 409-439; II, Trans.A.M.S. 84(1957), 1-55; III, Trans.A.M.S. 90 (1959), 431-484.
- [3] R.Gangolli, Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces, Acta Math. 121 (1968) 151-192.
- [4] R.Gangolli & G.Warner, On Selberg's trace formula, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 328-343.
- [5] Y.Matsushima, A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 1 (1967), 99-109.
- [6] 牟田 洋一, 一般ローレンツ群上の調和解析, 教理解析研究所講究録, 182 (1973), 119-140.
- [6'] Y.Muta, Fourier analysis on the De Sitter group and the trace formula, to appear.
- [7] Y.Shimizu, An analogue of the Paley-Wiener theorem for certain function spaces on the generalized Lorentz group, J. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo 16 (1969), 13-51.
- [8] R.Takahashi, Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 289-433.

- [9] P.C.Trombi & V.S.Varadarajan, Spherical transforms on semisimple Lie groups, Ann. of Math. 94 (1971), 246-303.